Л 3. Понятие вектора. Прямоугольная и полярная системы координат в пространствах. Проекция вектора на оси. Линейное пространство. Размерность и базис линейного пространства.

Цель лекции: познакомить студентов с понятием вектора и основными операциями над векторами, принципами задания координат в прямоугольной и полярной системах. Сформировать понимание линейного пространства, линейной зависимости и независимости векторов, а также базиса и размерности.

Основные вопросы

- Понятие вектора, нулевой вектор, равенство векторов.
- Линейные операции над векторами: сложение, вычитание, умножение на число.
- Линейная комбинация векторов.
- Линейная зависимость и независимость.
- Базис линейного пространства и его размерность.
- Прямоугольная декартова система координат в пространстве.
- Полярная система координат.
- Координаты вектора в базисе и разложение вектора по базисным векторам.
- Радиус-вектор точки в координатной системе.
- Проекция вектора на ось.
- Расстояние между точками на плоскости и в пространстве.

Краткое содержание: в лекции рассматриваются векторы и операции над ними, понятия линейной комбинации, зависимости и независимости векторов. Вводятся базисы в линейных пространствах и координаты векторов. Также изучаются декартова и полярная системы координат, проекции векторов и вычисление расстояний между точками.

Определение. Вектором называется отрезок с выбранным направлением, или направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и с концом в точке B обозначается через $\overrightarrow{AB}$, кроме того, вектор можно обозначать одним символом, например $\vec{a}$.

Вектор, у которого начало совпадает с его концом, называется нулевым вектором и обозначается через $\vec{0}$. Длина отрезка, изображающего вектор $\vec{a}$, называется модулем этого вектора и обозначается $\left|\vec{a}\right|$. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, параллельные одной прямой называются коллинеарными. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются равными, если они равны по модулю, коллинеарный и одинаково направлены. Из этого определения следует, что при параллельном переносе вектор не меняется, поэтому в качестве начала вектора можно выбрать любую точку.

Линейными операциями над векторами называются умножение вектора на число и сложение векторов.

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется такой вектор $\alpha\vec{a}$, что выполняются три условия.

1) $\left|\alpha\vec{a}\right| = |\alpha|\left|\vec{a}\right|$; 2) $\alpha\vec{a} \parallel \vec{a}$; 3) Вектор $\alpha\vec{a}$ со направлен вектору $\vec{a}$, если $\alpha > 0$ и направлен в противоположную сторону, если $\alpha < 0$.

Определение. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящих из одной точки, называется вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящий из той же точки. Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не исходят из одной точки, то их начала необходимо с помощью параллельного переноса перенести в одну точку. Это определение называется правилом параллелограмма. При сложении большого числа векторов удобнее пользоваться следующим определением, равносильным предыдущему.

Суммой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$, у которых начало $\vec{a}_i$ вектора совпадает с концом $\vec{a}_{i-1}$ $(i = 2 \div k)$, является вектор, соединяющий начало вектора $\vec{a}_1$ с концом вектора $\vec{a}_k$.

Эти линейные операции над векторами обладают следующими свойствами.

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; **2.** $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; **3.** $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = (\alpha\beta)\vec{a}$; **4.** $(\alpha+\beta)\left(\vec{a}\right) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;

5. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; **6.** $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$; **7.** $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}\alpha$.

Операция разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сводится к двум линейным операциям: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$, однако часто удобней пользоваться следующим специальным определением, равносильным вышеприведённому.

Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящих из одной точки называется вектор, соединяющий конец вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$ и направленный в сторону конца вектора $\vec{a}$.

Определение. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ с коэффициентами $C_1, C_2, ..., C_n$ называется вектор $C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2 + ... + C_n\vec{a}_n$.

Эта комбинация обладает двумя основными свойствами.

1) Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ коллинеарные некоторой прямой, то любая их линейная комбинация будет коллинеарной той же прямой. Векторы

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

2) Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ компланарны некоторой плоскости, то любая их линейная комбинация компланарна той же плоскости.

Определение. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $C_1, C_2, ..., C_n$, не все равные нулю, что $C_1 \vec{a}_1 + C_2 \vec{a}_2 + ... + C_n \vec{a}_n = 0$

В противном случае векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются линейно независимыми.

Определение. Совокупность n линейно независимых векторов называется базисом.

Множество всех плоских или пространственных векторов, в которых определены операции сложения векторов и умножение вектора на число, являются простейшими примерами векторного пространства.

Определение. Множество векторов, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше семи свойствам называется векторным пространством. Оказывается, что в любом векторном пространстве всегда можно выбрать несколько векторов, из которых с помощью линейных комбинаций однозначно можно получить любой вектор этого пространства и которые являются базисными.

Определение. Любой ненулевой вектор $\vec{e}$ на прямой называется базисным вектором этой прямой. Любая пара неколлинеарных векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ плоскости называется базисом этой плоскости. Любая тройка некомпланарных векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ называется базисом пространства.

Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется прямоугольной системой координат.

Полярная система координат определена, если задана точка *O,* называемая полюсом, и исходящий из полюса луч *l*, которой мы назовем полярной осью.

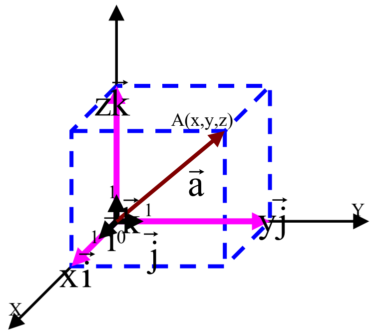
Декартовы координаты точки выражаются через ее полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Определение. Коэффициенты линейной комбинации базисных векторов, выражающие вектор $\vec{a}$ на прямой, в плоскости или в пространстве называются, координатами вектора $\vec{a}$ в данном базисе. Вектор, лежащий на прямой, имеет одну координату x, на плоскости – две координаты x, y; в пространстве – три координаты x, y, z. Векторы удобно отождествлять с координатами в некотором выбранном базисе. Так, вектор $\vec{a}$ в пространстве записывают в виде: $\vec{a} = (x, y, z)$.

Теорема. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Пусть в пространстве имеется прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. С ней связан стандартный базис из единичных взаимно перпендикулярных векторов, расположенных вдоль осей Ox, Oy, Oz. Эти базисные вектора обозначаются через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



Определение. Вектор, начало которого находится в начале координат, а конец в точке A, т.е. вектор $\vec{OA}$, называется радиус-вектором точки А. Если (x, y, z) – координаты точки A в системе $Oxyz$, то радиус-вектор $\vec{OA}$ можно записать в виде $\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Поэтому координаты точки $A(x, y, z)$ в системе $Oxyz$ и вектора $\vec{OA}$ в базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}.\right\}$ – это одни и те же числа.

Теорема. Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ заданы две точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, тогда в базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}.\right\}$ вектор $\vec{AB}$ имеет координаты $((x_B - x_A), (y_B - y_A), (z_B - z_A))$.

Теорема. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты x, y, z в базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}.\right\}$, тогда $x = \text{ПР}_{Ox}\vec{a}$, $y = \text{ПР}_{Oy}\vec{a}$, $z = \text{ПР}_{Oz}\vec{a}$.

Определение. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ненулевой вектор $\vec{b}$ (обозначение $\text{ПР}_{\vec{b}}\vec{a}$) называется его проекция на ось L, проведенная через вектор $\vec{b}$.

Теорема 2. Расстояние между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ на плоскости Oxy находится по формуле $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Теорема 3. Расстояние между точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ в пространстве $Oxyz$ находится по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Пример. Пусть A(1,1,1), B(2,3,–1). Найдем $|AB|$.

$$|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{9}=3.$$

Определение. Разделить отрезок AB в отношении λ $(\lambda>0)$ это значит найти на нём такую точку M, что $\dfrac{|AM|}{|MB|}=\lambda.$

Теорема. Пусть точка $M(x_M, y_M, z_M)$ делит отрезок AB в отношении λ, где $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, тогда

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}; \qquad y_M=\dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}; \qquad z_M=\dfrac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda} \end{cases}$$

Следствие. Если точка M является серединой отрезка AB, то

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}; \qquad y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}; \qquad z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}. \end{cases}$$

Эти формулы получаются из формул теоремы при $\alpha=\beta=1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется вектором и когда два вектора считаются равными?
2. Как определяется сумма двух векторов?
3. Что такое линейная комбинация векторов?
4. В чем различие между линейной зависимостью и независимостью?
5. Дайте определение базиса линейного пространства.
6. Что означает размерность линейного пространства?
7. Как найти координаты вектора в данном базисе?
8. Как выражается радиус-вектор точки через её координаты?
9. Как вычисляется расстояние между двумя точками на плоскости и в пространстве?
10. Что называется проекцией вектора на ось?
11. Как связаны декартовы и полярные координаты?

Литература

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — СПб.: Лань, 2009.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ФМЛ, 2004.
3. Индивидуальные задания по высшей математике / под ред. А.П. Рябушко. — Минск: Выш. школа, 2009.
4. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике, 2009.